大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士課程（前期課程）
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質理学専攻（物理系）

物理学　問題【Ｉ】【II】

２０１１年8月２４日（水）９時２０分～１１時２０分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【Ｉ】、物理学【II】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

２．素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）もしくは物質理学専攻（物理系）を第４志望までに１つでも志望するものは、物理学【Ｉ】および【II】のみを選択すること。

３．答案用紙は黄、青を全員に各１枚、出願時の志望先に応じて必要な者に紫を２枚ずつ、それに草案用紙を各１枚配布してあるが、解答用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。

４．答案用紙最下段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

1. 誘電体を電場のなかに置くと分極が起こる。真電荷の密度を ρ、分極によって生じる分極電荷密度を ρ_P と書くとき、これらの量と電場 $\boldsymbol{E}$ および真空の誘電率 ε_0 を用いて、ガウスの法則を書け。

   また、分極ベクトルを $\boldsymbol{P}$ と置くと、$\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\rho_P$ と書くことができる。電束密度 $\boldsymbol{D}$ を $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$ の式によって定義すると、ガウスの法則は $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$ と書けることを示せ。

2. 下図のように、距離 d だけ離れた十分に広い面積 S の 2 つの平行金属板があり、その間は下側の金属板からの距離 x に依存する誘電率 $\varepsilon(x)$ の誘電体で満たされている。上下の金属板に真電荷を面密度 σ_1、σ_2 で与える。

   (a) 誘電体内 (板間) と、外 ($x<0$ と $x>d$ の真空領域) の、電束密度の x 成分 $D(x)$ と電場の x 成分 $E(x)$ を求めよ。

   (b) $\sigma_1=-\sigma_2=\sigma\ (>0)$ のとき、誘電体内の電場は $E(x)=-\sigma/\varepsilon(x)$ となる。定数 ε_1、ε_2 (ただし、$\varepsilon_1>\varepsilon_2$) を用いて、誘電率 $\varepsilon(x)$ が次の式で与えられる場合を考える。

$$\varepsilon(x)=\varepsilon_2\quad(0\le x\le d/2)、\qquad \varepsilon(x)=\varepsilon_1\quad(d/2<x\le d)$$

   (b-1) この平行金属板の電気容量を求めよ。

   (b-2) 誘電体内部に発生する分極電荷の分布を求めよ。

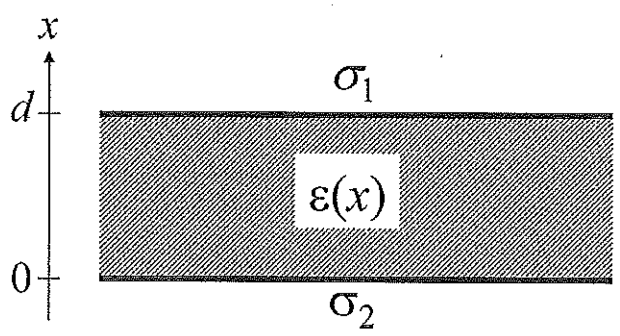
   (c) $\sigma_1=-\sigma_2=\sigma\ (>0)$ とし、誘電率 $\varepsilon(x)$ として次の場合を考える ($\varepsilon_1>\varepsilon_2$)。

$$\varepsilon(x)=(x/d)\varepsilon_1+(1-x/d)\varepsilon_2\quad(0\le x\le d)$$

   (c-1) この平行金属板の電気容量を求めよ。

   (c-2) 誘電体内部の分極電荷の分布を求めよ。また、その分布の概略を図示せよ。

   (c-3) 金属板間に蓄えられる静電エネルギーを求めよ。



一辺 L の２次元平面（面積が L^2 の正方形）内に閉じ込められた、質量 m の単一種の粒子からなる理想気体の熱力学的性質について考察する。

1. 状態密度 $D(\epsilon)$ は、正のエネルギー ϵ に対して
$$D(\epsilon) = D_2$$
で与えられる。定数 D_2 を求めよ。ただしスピン自由度による縮重度は考えないこととし、プランク定数 h もしくは $\hbar = h/2\pi$ を用いて解答せよ。

2. 古典粒子の場合、分布関数はマクスウェル・ボルツマン分布関数 $f_{\mathrm{MB}}(\epsilon) = \exp(-\beta(\epsilon-\mu))$ で与えられる。ただし μ は化学ポテンシャル、$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ である。このとき粒子数 N は、
$$N = D_2 \int_0^\infty f_{\mathrm{MB}}(\epsilon) d\epsilon$$
で与えられる。この積分を実行し、μ の温度依存性を求めよ。さらに、高温では、$\beta\mu$ は負になり、かつ $|\beta\mu| \gg 1$ を満たすことを示せ。

3. フェルミ粒子の場合、分布関数はフェルミ・ディラック分布関数 $f_{\mathrm{FD}}(\epsilon) = 1/[\exp(\beta(\epsilon-\mu)) + 1]$ で与えられる。このとき粒子数 N は
$$N = D_2 \int_0^\infty f_{\mathrm{FD}}(\epsilon) d\epsilon$$
で与えられる。この積分を実行し μ の温度依存性を求め、μ を温度の関数として図示せよ。特に、$T = 0$ の時、$\mu = \epsilon_F$ となる。ϵ_F を N と D_2 を用いて表せ。

4. 2次元フェルミ粒子系の低温領域におけるエネルギー E と定積比熱 C、エントロピー S を求めよ。ただし、E は温度の２次、C と S は温度の１次までの近似で良い。なお、低温では、μ は温度によらず一定とみなすことができ、以下のゾンマーフェルトの展開公式を用いてよい。
$$\int_0^\infty G(x) f_{\mathrm{FD}}(x) dx = \int_0^\mu G(x) dx + \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 G'(\mu) + O((k_{\mathrm{B}}T)^4)$$
ここで、$G(x)$ は x の微分可能な任意の関数、$G'(x) = dG(x)/dx$ である。

5. 2次元フェルミ粒子系の高温におけるエネルギー E を $e^{\beta\mu}(\ll 1)$ の２次まで展開し、問 3. の結果を用いると、
$$E = Nk_{\mathrm{B}}T + \alpha N \epsilon_F$$
が得られる。古典極限（$E = Nk_{\mathrm{B}}T$）からの補正項の係数 α を求めよ。

大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士課程（前期課程）
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質理学専攻（物理系）

物理学　問題【Ⅲ】【Ⅳ】

２０１１年8月２４日（水）１３時００分～１５時００分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【Ⅲ】、物理学【Ⅳ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

２．素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）もしくは物質理学専攻（物理系）を第４志望までに１つでも志望するものは、物理学【Ⅲ】および【Ⅳ】のみを選択すること。

３．答案用紙は赤、緑を全員に各１枚、出願時の志望先に応じて必要な者に茶を２枚ずつ、それに草案用紙を各１枚配布してあるが、解答用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。

４．答案用紙最下段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

物理学 [III] (答案用紙：赤)

一様重力場中の質点の運動を考える。質点の質量を m、重力加速度を g とし、$-z$ 方向に重力がかかるとする。また、質点には空気抵抗は働かないとする。円筒座標系 (r, ϕ, z) を用いて、下記の問題に答えよ。なお、直交座標系との関係は、$x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$ で与えられる。

1. 質点の運動エネルギーを書け。

2. 質点のラグランジアンを書け。

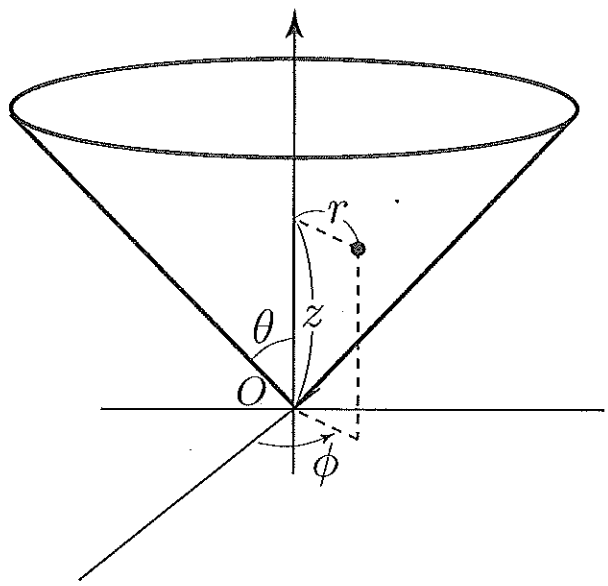
3. 以下、図のような円すい上に滑らかに束縛された質点の運動を考える。円すいの開き角を θ とする。束縛条件 $r = z\tan\theta$ を用いて、$r, \dot{r}(=\frac{dr}{dt})$ を消去したラグランジアンを書け。

4. ラグランジュの方程式を用いて、z 軸方向の角運動量 l が保存することを示せ。

5. z 軸方向の角運動量 l を用いて、z 軸方向の運動に関する有効ポテンシャルを求め、概形を書け。

6. z 軸方向の角運動量 l_0 を与えた場合、円運動となるときの z 方向の座標 z_0 と角運動量 l_0 の関係式を求めよ。また、その時の速さ v_0 を l_0, m, g, θ を用いて表せ。

7. $z = z_0$ の位置から円すい面に沿って ϕ 方向に初速 v_1 で質点を発射したとする。$0 < v_1 < v_0$ の場合、どのような運動になるか。有効ポテンシャルを用いて説明せよ。



中性子は陽子とともに原子核を構成する粒子である。電気的に中性で、その質量 M は $940\mathrm{MeV}/c^2$ (c は光速、$\mathrm{MeV} = 10^6\mathrm{eV}$)、スピンは 1/2 である。真空中では不安定であるが、寿命は約15分と長く、様々な研究や利用がなされている。以上をふまえ、プランク定数を $\hbar(\equiv h/2\pi)$ とおき、以下の問に答えよ。

1. x 軸に垂直な境界を持つ十分厚い壁に向かって入射した中性子の反射を考える。壁によって生じる中性子のポテンシャル V は図1で与えられる。入射中性子の運動エネルギーを E とし、$x = -\infty$ から平面波で中性子を入射した。

   (a) $x < 0$ の反射波、$x > 0$ の透過（屈折）波を以下の手順に従って求めよ。

   (a-1) 入射波 $\psi_i(x)$ を平面波で $\psi_i(x) = \exp(ikx)$ と書いたとき、k を M と E で与えよ。

   (a-2) 入射波、反射波、透過波をそれぞれ $\psi_i(x), \psi_r(x), \psi_t(x)$ とおいたとき、$x = 0$ での接続条件を示せ。

   (a-3) $E > V_0$ のときの反射波 $\psi_r(x)$、透過波 $\psi_t(x)$ を求めよ。

   (a-4) $E < V_0$ のときの反射波 $\psi_r(x)$、透過波 $\psi_t(x)$ を求めよ。

   (b) 中性子の透過（屈折）率と反射率を求めよ。

   (c) 中性子が壁で全反射となる条件を示せ。

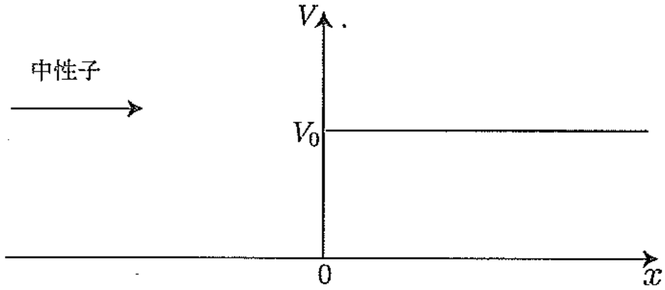


図1

2. 全反射をする壁で作られた容器の中に中性子を閉じ込める。このとき、地球の重力ポテンシャルにより、閉じ込められた中性子のエネルギーは量子化される。重力加速度 g を一定とし、以下の問に答えよ。容器の底を $z=0$ にとり、重力加速度の方向を $-z$ 方向にとる。容器の壁のもつポテンシャルエネルギーは無限大とする。簡単のため、容器の底は平らで十分に広く、容器の高さも十分に高いとし、以下では z 軸方向の運動のみを考えよ。

(a) 中性子の z 軸方向の波動関数 $\psi(z)$ のシュレーディンガー方程式を与えよ。

(b) 不確定性関係を用いて基底状態の波動関数の z 軸方向の広がりを評価し、$g=9.8\,\mathrm{m/s^2}$、$\hbar c = 2.0\times 10^{-13}$ MeVm、$c=3.0\times 10^{8}$ m/s を使って、次の中から近いものを選べ。なお答案には評価の過程も記せ。

(1) 10^{-3}m (2) 10^{-5}m (3) 10^{-7}m (4) 10^{-9}m

(c) 束縛状態にある中性子の波動関数の $z=0$ および $z=\infty$ での境界条件を与えよ。それをもとに、シュレーディンガー方程式を解き、束縛状態の波動関数とそのエネルギー固有値の関係を示せ。必要であればページ最後の（注）を参照せよ。なお波動関数の規格定数を求める必要はない。

(d) 基底状態と第1励起状態の波動関数の概略を z の関数として重ねて図示せよ。波動関数の規格化定数は任意でよい。また、z 軸の目盛りは原点を除いて示す必要はない。

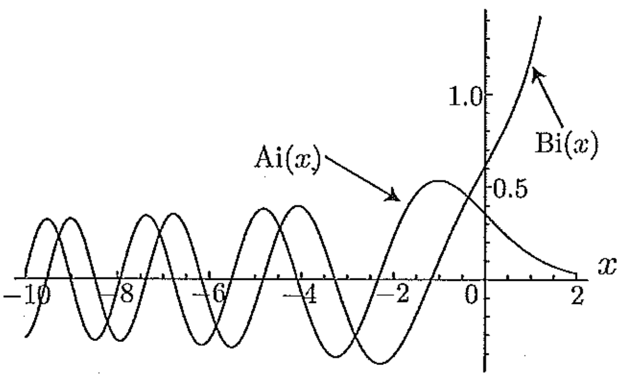


図2

（注）次の微分方程式の解はエアリー関数、Ai(x) および Bi(x) で与えられる。

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0$$

$x=+\infty$ で Ai(x) と Bi(x) はそれぞれ 0 および $+\infty$ となる。2つの関数のふるまいは図2で与えられる。

3. 中性子は磁気双極子能率 $\vec{M}_n$ を持つことが知られ、外部磁場 $\vec{B}$ との相互作用は次のハミルトニアンで与えられる。

$$H = \vec{M}_n \cdot \vec{B}$$

ここで $\vec{M}_n = \mu_n \vec{S}/|\vec{S}|$ で、$\vec{S}$ は中性子のスピンである。$\vec{S} = (\hbar/2)\vec{\sigma}$ で与えられ、パウリ行列 σ_i $(i = x, y, z)$ は次の通りである。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

図3の様に、$x > 0$ に壁をおき、運動エネルギー E の中性子を xz 平面にそって壁と θ の角度をもって入射した。$x < 0$ では z 軸方向に平行な一定の外部磁場があり、さらに入射中性子のスピンは z 軸方向 $+\hbar/2$ に偏極している。問1と同様に、壁の内側にはポテンシャルエネルギー $V = V_0$ があり、さらに一定磁場が yz 平面にそって存在する。壁は十分に大きく、中性子の衝突によって変化することはない。壁内外の一定磁場を保つように壁表面に流れる電流や、重力の効果は無視してよい。

(a) y 方向、z 方向の中性子の運動量は保存する。その理由を説明せよ。

(b) 壁の中の磁場が $B_y \neq 0$、$B_z \neq 0$ の時、図3の様に入射した中性子は2方向に反射した。2方向へ反射した理由を説明せよ。また、壁の中の磁場を $B_y = 0$、$B_z \neq 0$ としたときどうなるか。

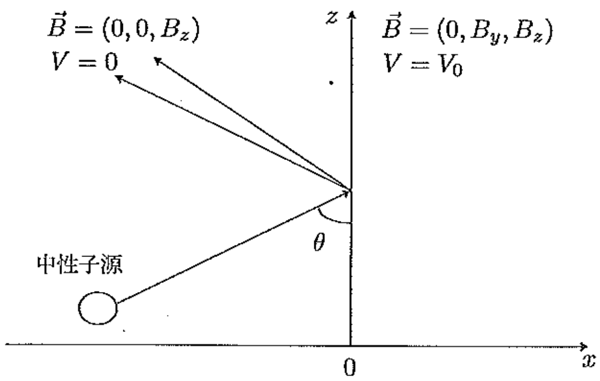


図3