大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士課程（前期課程）
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質理学専攻（物理系）

物理学　問題【Ｉ】【Ⅱ】

２０１２年８月２９日（水）９時２０分～１１時２０分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【Ｉ】、物理学【Ⅱ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

２．素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）もしくは物質理学専攻（物理系）を第４志望までに１つでも志望するものは、物理学【Ｉ】および【Ⅱ】のみを選択すること。

３．答案用紙は黄、青を全員に各１枚、出願時の志望先に応じて必要な者に紫を２枚ずつ、それに草案用紙を各１枚配布してあるが、解答用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。

４．答案用紙最下段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

一般に原点に置かれた磁気双極子が $\vec{r}$ に作るベクトル・ポテンシャル $\vec{A}(\vec{r})$ は、その磁気双極子モーメントを $\vec{m}$ として、

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} \tag{1}$$

と表される。ここで μ_0 は真空の透磁率である。いま原点にモーメント $\vec{m}_0$ の磁気双極子が $+Z$ 方向に向けて置かれているとして以下の問に答えよ。必要に応じて以下の公式を用いてもよい。

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \tag{2}$$

1. 一般にベクトル・ポテンシャル $\vec{A}(\vec{r})$ の作る磁場 $\vec{B}$ は $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ と表すことができる。

   (a) $\vec{m}_0$ の作る磁場 $\vec{B}_0$ は次式で表されることを示せ。

   $$\vec{B}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}_0\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}_0}{r^5} \tag{3}$$

   (b) $\vec{m}_0$ の作る磁場 $\vec{B}_0$ の概略を XZ 面内の磁力線で示せ。

2. 一般に磁場 $\vec{B}$ 中に置かれた磁気双極子 $\vec{m}$ は $U = -\vec{m}\cdot\vec{B}$ の相互作用エネルギーを持つ。

   (a) 図 1 の各点 P_i $(i = 1, 2, 3)$ に磁気双極子 $\vec{m}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $|\vec{m}_i| = m'$ を別々に置いたとき、それぞれが $\vec{m}_0$ $(|\vec{m}_0| = m_0)$ との間に持つ相互作用エネルギーを求めよ。ただし点 P_i の位置座標および $\vec{m}_i$ の (x, y, z) の各成分は以下の通りである。

   $$\begin{aligned} &P_1(1,0,0), \quad P_2(-1,0,0), \quad P_3(0,0,1), \\ &\vec{m}_1 = (0,0,m'), \quad \vec{m}_2 = (0,m',0), \quad \vec{m}_3 = \left(m'/\sqrt{2},\ 0,\ m'/\sqrt{2}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

   (b) 磁気双極子 $\vec{m}_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ それぞれが $\vec{m}_0$ から受ける力は引力か斥力かを判定せよ。またその大きさを求めよ。

3. 図 2 に示すように、点 $P(1,\ 0,\ 0)$ を通り Z 軸に平行な直線上を、中心の位置が $\vec{r} = (1,\ 0,\ z)$ の円形コイルが一定の速度 v で $z = 5$ から $z = -5$ まで移動する場合を考える。ここで円形コイルの半径は a、巻き数は 1、電気抵抗は R とし、移動中コイルの作る平面は常に XY 面に平行であるとする。また $a \ll 1$ であり、コイル面内の磁場は中心の磁場に等しく一定であるとしてよい。

   (a) コイルの自己インダクタンスは無視できるものとして、コイルに流れる電流の大きさを z の関数として表し、極値を与える z を求めよ。またその概略を図に示せ。ただし電流は図 2 の円形コイルに示された矢印の向きを正とする。

   (b) コイルの自己インダクタンスを L としたとき、L による起電力が (a) における最大起電力と比べ無視できる条件を、L, R, v, B'_{Max} および d^2B_z/dz^2 を用いて示せ。ただし (a) における最大起電力を与えるときの dB_z/dz の値を B'_{Max} とする。

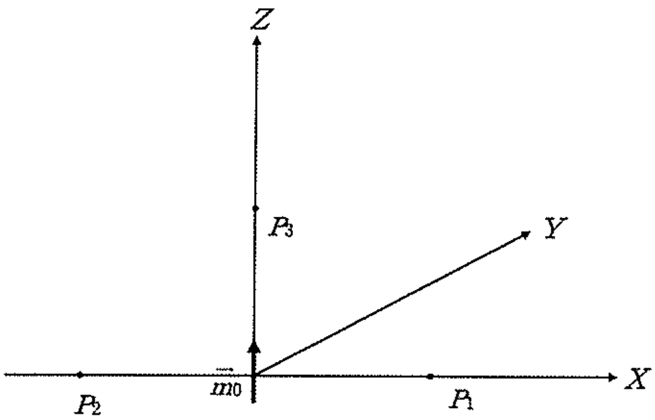


図 1

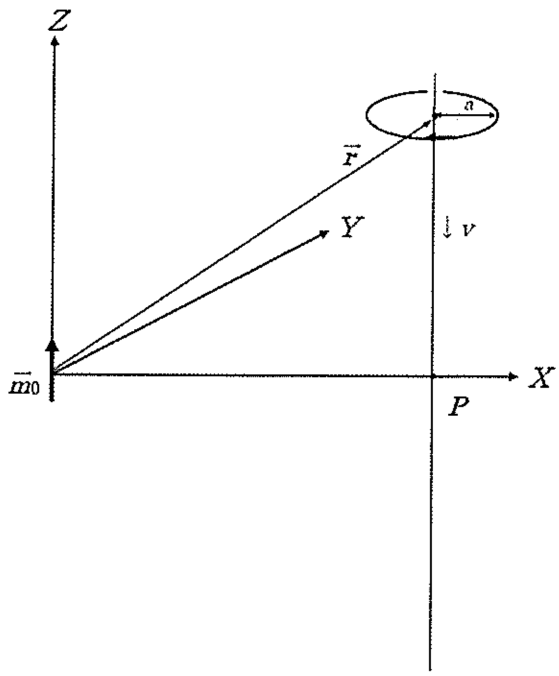


図 2

1. ある種の半導体を微細加工することによって2次元電子系を人工的に作り出すことができる。このとき、電子のエネルギー分散関係は近似的に

$$E_{\pm}^{0}(\vec{p}) = \pm\sqrt{\Delta^2 + v^2|\vec{p}|^2} \tag{1}$$

と表される（下図参照)。ここでエネルギーギャップ $2\Delta > 0$、速さ $v > 0$、運動量 $\vec{p} = (p_x, p_y)$ である。ボルツマン定数を k_{B} とする。

(a) $E_{+}^{0}(\vec{p})$ を伝導バンド、$E_{-}^{0}(\vec{p})$ を価電子バンドと呼ぶ。伝導バンドの電子数密度 n と価電子バンドの正孔数密度 p は、温度 T と化学ポテンシャル μ の関数として次のように表される。

$$n = \int_{\Delta}^{\infty} D(E) f(E) \mathrm{d}E, \tag{2}$$

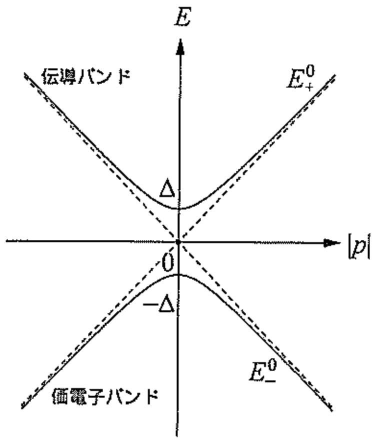
$$p = \int_{-\infty}^{-\Delta} D(E)[1 - f(E)] \mathrm{d}E \tag{3}$$

ここで、$f(E) = 1/(e^{(E-\mu)/k_{\mathrm{B}}T} + 1)$ はフェルミ分布関数、$D(E)$ は単位面積あたりの状態密度である。正孔とは何かについて簡潔に説明し、p が式 (3) で表される理由を述べよ。

(b) $n = p$ のとき、温度によらず $\mu = 0$ であることを示せ。

(c) 単位面積あたりの状態密度 $D(E)$ を求め、図示せよ。

(d) $n = p$ のとき、低温 ($k_{\mathrm{B}}T \ll \Delta$) および高温 ($k_{\mathrm{B}}T \gg \Delta$) における n の温度依存性を求めよ。必要があれば $\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1} dx = \frac{\pi^2}{12}$ を用いよ。



2. 前問の2次元電子系に対し磁場 $\vec{B}$ を2次元面に平行に印加すれば、エネルギー分散関係は

$$E_{\pm}(\vec{p}, \sigma) = E_{\pm}^{0}(\vec{p}) - \sigma_m \mu_{\mathrm{B}} B \tag{4}$$

で与えられる。μ_{B} はボーア磁子、$\sigma =\uparrow, \downarrow$ は磁場の方向を量子化軸としたスピンの向き（$\sigma =\uparrow$ のとき $\sigma_m = 1$、$\sigma =\downarrow$ のとき $\sigma_m = -1$）を表す。また化学ポテンシャル $\mu = 0$ とする。

(a) 単位面積あたりの状態密度 $D(E, \sigma)$ を 1. で定義した $D(E)$ を用いて表せ。

(b) 式 (2) を参考に、伝導バンドの電子数密度 n_σ ($\sigma =\uparrow, \downarrow$) を、$D(E, \sigma)$ と $f(E)$ を用いて表せ。積分区間を明示すること。

(c) 温度 $T = 0$ における単位面積あたりの磁化 M を考えよう。$\mu_{\mathrm{B}} B > \Delta$ では磁化が発生する。$\mu_{\mathrm{B}} B > \Delta$ の場合の $D(E, \uparrow)$ と $D(E, \downarrow)$ を図示し、磁化が発生する理由を説明せよ。

(d) 磁化 $M = \sum_\sigma \sigma_m (n_\sigma - p_\sigma)$ を磁場 $B (> 0)$ の関数として求め、図示せよ。

大学院入試問題

名古屋大学大学院理学研究科博士課程（前期課程）
素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）
素粒子宇宙物理学専攻（宇宙地球物理系）
物質理学専攻（物理系）

物理学　問題【Ⅲ】【Ⅳ】

２０１２年８月２９日（水）１３時００分～１５時００分

受験上の注意

１．この冊子には物理学【Ⅲ】、物理学【Ⅳ】の２題ある。答案は問題別に指定された色の用紙に記入すること。同一問題が２枚にわたる場合も、指定された色の用紙を用いること。

２．素粒子宇宙物理学専攻（素粒子宇宙物理系）もしくは物質理学専攻（物理系）を第４志望までに１つでも志望するものは、物理学【Ⅲ】および【Ⅳ】のみを選択すること。

３．答案用紙は赤、緑を全員に各１枚、出願時の志望先に応じて必要な者に茶を２枚ずつ、それに草案用紙を各１枚配布してあるが、解答用紙を変更する場合や、不足した場合は申し出ること。

４．答案用紙最下段の所定欄に必要事項を書き込むこと。ただし、評価欄には何も書き込んではならない。

1. 質量 m_1、m_2 の二つの質点が、非相対論的運動をしている。実験室系におけるそれぞれの質点の位置を表す 3 次元ベクトルを $\vec{q_1}$、$\vec{q_2}$ とし、両者の相対位置を表すベクトルを $\vec{r} = \vec{q_1} - \vec{q_2}$ で表すものとする。この二つの質点は、両者の相対距離のみに依存するポテンシャル $V(r)$ のもとで相互作用している。時間を t とし、以下の設問に答えよ。

   (a) 重心の位置を表すベクトルを $\vec{R}$ とする。この系のラグランジアンを、$\vec{R}$ と $\vec{r}$ を用いて表し、重心の運動が等速直線運動であることを示せ。

   (b) 相対運動の角運動量を $\vec{l}$ とする。$\vec{l}$ が保存量であることを示し、相対運動が一つの平面内に限られることを示せ。

   (c) 以降の設問では $\vec{l} \neq \vec{0}$ とし、設問 (b) の平面内に極座標 (ρ, θ) を定義する。相対運動のラグランジアンを (ρ, θ) を用いて書け。

   (d) 相対運動のハミルトニアンを導き、ρ 及び θ についての正準方程式を書け。

   (e) θ に正準共役な運動量の絶対値が $l = \left|\vec{l}\right|$ に等しいことを示せ。

   (f) 相互作用ポテンシャルが
   $$V(\rho) = -\frac{A}{\rho^2} \tag{1}$$
   で与えられている場合を考える。A は ρ に依存しない正の定数である。ある時刻 t_0 において、二つの質点が互いに近づくとする。両者がやがて互いに遠ざかるために、角運動量の大きさが満たすべき条件を示せ。

   (g) 相互作用ポテンシャルが
   $$V(\rho) = \frac{B}{\rho^2}$$
   で与えられている場合を考える。B は ρ に依存しない正の定数である。時刻 $t = -\infty$ で、二つの質点が無限遠方から近づくとする。このとき、$\mu = 1/\rho$ を θ の関数として考え、μ の満たすべき微分方程式を求めよ。また、ベクトル $\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t|_{t=-\infty}$ とベクトル $\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t|_{t=\infty}$ がなす角を求めよ。

1 次元の量子力学を考える。プランク定数を h, $\hbar = h/2\pi$ として、以下の問いに答えよ。

1. ポテンシャル

$$V(x) = V_0 x^2,$$

のもとでの、質量 m の粒子の 1 粒子状態を考える。ここで V_0 は正の定数であり、x はこの粒子の位置座標である。

(a) エネルギー E の固有状態を考える。このときの波動関数を $\psi(x)$ とする。この状態の従うシュレディンガー方程式を書き下せ。

(b) 前問のシュレディンガー方程式に含まれるハミルトニアン演算子を

$$H = \left(\alpha x - \beta \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\alpha x + \beta \frac{\partial}{\partial x}\right) + E_0, \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

の形に書き換え、定数 α, β, E_0 を求めよ。

(c) 次の形の波動関数で表される状態を考える。

$$\psi_0(x) = Ce^{-\kappa x^2},$$

ここで、C, κ は定数である。定数 κ を適当に選ぶことにより、この状態が問 1(a) のシュレディンガー方程式を満たすことを示せ。また、このときの κ を求め、対応するエネルギー固有値を決定せよ。

(d) さらに、波動関数の規格化条件を用いて、定数 C を求めよ。ここで必要に応じてガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

を用いても良い。

(e) 問 1(c) のエネルギー固有状態において、x^2 の期待値を測定したところ、$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = 0.50 \times 10^{-1}$ nm であった。この粒子の質量 m を $m = 5.1 \times 10^2$ keV/c^2 $= 9.1 \times 10^{-31}$ kg として、この状態のエネルギー固有値を電子ボルト (eV) の単位を用いて 1 桁の有効数字で求めよ。ここで、$\hbar c = 0.197$ keV nm, $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ J s, 1 J $= 0.624 \times 10^{19}$ eV の値を用いてよい。光速 c の値は、$c = 3.0 \times 10^8$ m/s とする。

2. 次に質量 m、スピン 0 の同種ボーズ粒子の 2 粒子状態を考える。これらふたつの粒子の座標を x_1, x_2 で表す。問 1 で与えたポテンシャルに加えて、これらの 2 粒子間には斥力ポテンシャルがはたらいており、全体として、ポテンシャルは

$$V(x_1, x_2) = V_0(x_1^2 + x_2^2) - V_1(x_1 - x_2)^2$$

で与えられるものとする。ここで、V_0, V_1 は正の定数である。

(a) この系に束縛状態が存在するためには、正の定数 V_0, V_1 はある条件を満たさねばならない。どのような条件が必要になるかを導け。

(b) 前問の条件が満たされているものと仮定して、この系の基底状態のエネルギー固有値を求めよ。

(c) 同様に (a) の条件が満たされているものと仮定して、この系の第 1 励起状態のエネルギー固有値を求めよ。